# 物理こぼれ話（5）

KENZOU

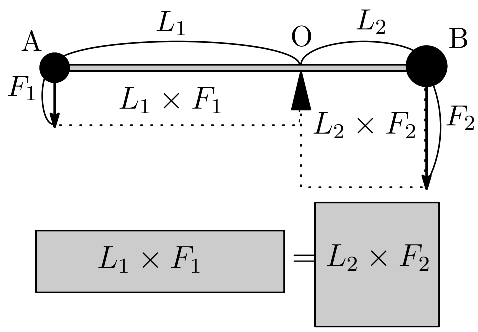
2016.3.25

## 第 5 話.　●力の平行四辺形

### ●テコの原理とつり合い

いまさらテコ原理なんてと思うかもしれないが，しばらくおつきあい願いたい。

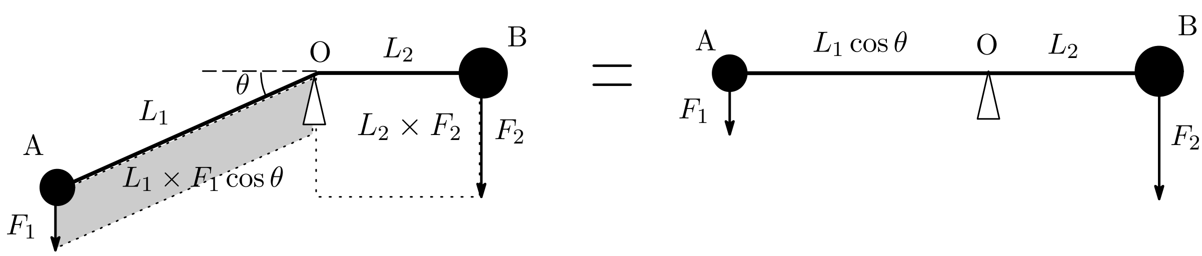
いま，竿秤にかけた 2 つの物体 A，B が図のようにつり合っているとしよう。アルキメデス[1]は「竿秤に掛けられた物体 A，B がつり合うのは，物体 A，B の重さが始点 $O$ からの距離に反比例するときである」というテコの原理を見いだした。すなわち，A，B の重さをそれぞれ $F_1$，$F_2$ とすると $F_1 \propto 1/L_1$, $F_2 \propto 1/L_2$ で，これから




$$L_1F_1 = L_2F_2$$

という関係式が得られる。この式は腕の長さ（$L$）と重さ（$F$）で作られる面積が互いに等しいということを意味しているね。

- コニー：たしかにそうだけど， それがどうしたのかしら？
- K 氏：うん，例えば左図のように支点 $O$ で折れ曲がっている竿天秤を考えてみよう。この天秤の両端に重り A，B を掛けてつり合っているとする。




[1]紀元前 287 年? - 紀元前 212 年。イタリア半島の西南の地中海に位置するシチリア島で生まれる。

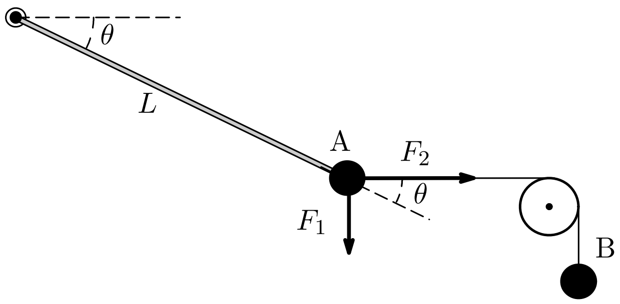
支点 $O$ の左側の面積は平行四辺形の面積になり，これは $L_1F_1\cos\theta$ だ。一方，右側の面積は $L_2F_2$ だね。つり合っているときこの 2 つの面積は等しくなけらばならないので

$$L_1F_1\cos\theta = L_2F_2$$

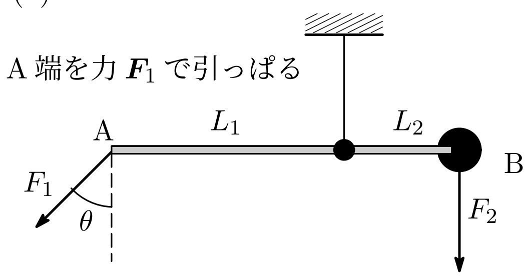
となる。

- コニー：なるほど，昔，天下り的（？）に習った式がでてきたけど，テコ原理はそういう意味があったのね。。
- K 氏：それじゃ次の (1)，(2) の場合はどうなるかやってみるかい。竿の重さは無視する。

(1)




(2)




- コニー：四辺形の面積を計算すればいいのだから，つり合いの条件は，(1) の場合は

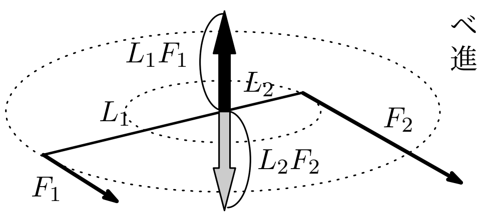
$$LF_1\cos\theta = LF_2\sin\theta, \quad \therefore\ \frac{F_1}{F_2} = \tan\theta$$

(2) の場合は

$$L_1F_1\cos\theta = L_2F_2$$

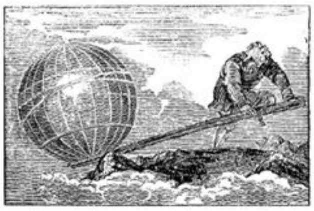
となるわ。

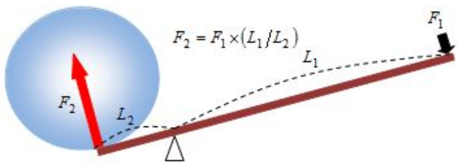
- K 氏：OK！ところで，上で計算した面積の大きさを「力のモーメント」の大きさといっている。モーメントというのは回転する能力のことだ。回転といっても右回りもあれば左回りもあり，つまり回転の向きがあるわけだ。大きさと向きをもつものはベクトル量だから，モーメントはベクトル量なんだね。




ベクトルの向きは右ネジの
進む方向

- コニー：竿天秤がつり合って静止しているのは，反時計回りのモーメントと時計回りのモーメントのベクトルが相殺した結果ということなのね。
- K 氏：そういうことだね。ところで，余談だが，アルキメデスは「私に支点を与えよ。されば地球を動かしてみせよう」といったという話は有名だね。アルキメデスは地球というものを既に重さをもった球体だと洞察していたのか。。。いずれにしても面白い逸話だね。





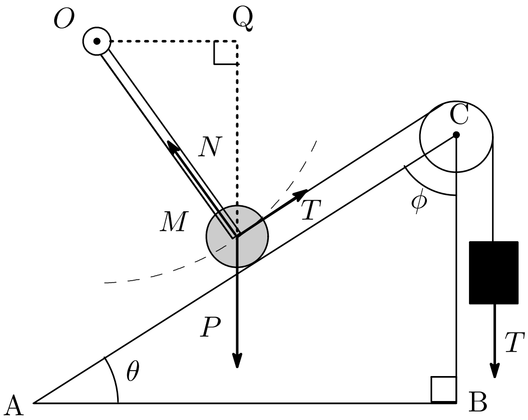

- コニー：アルキメデスが支点から $L_1$ の距離で棒に直角に力 $F_1$ を加えれば，支点から反対側の $L_2$ の距離にある地球には $F_1$ の $L_1/L_2$ 倍の力，つまり $F_2 = F_1 \times (L_1/L_2)$ の力がかかるわけね。だから $L_1$ を $L_2$ に対して十分大きくとれば，$F_1$ が小さな力であっても地球には非常に大きな力 $F_2$ がかかるというわけね。

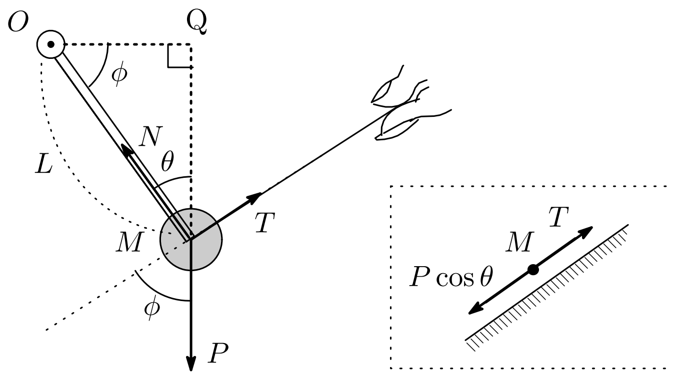
## ●斜面のつり合い（斜面の理）

摩擦のない斜面上に置かれた物体 M が紐で片方に引かれていて静止している問題を考えよう。ダビンチやガリレイが活躍していた中世ヨーロッパでは，“ いろいろな傾斜角をもつ斜面に沿っての力はどのような条件下に平衡を保つか ”ということが未解決の問題だった。武谷三男「物理学入門 力と運動」（ちくま学芸文庫 , 2014）には『ある重量を一定の高さに持ち上げるには，その重さ，すなわちその物体に働く重力より小さな力では持ち上げることができない。しかし，斜面上を滑らして上げていけば，小さな力で上げることができる。これも古代から分かっていたことである。しかし，この斜面の理についてはレオナルド[2]も正しい考えに達することができなかった。』と書かれている。いまでは中学理科か高校物理で習うような問題に人類は長いこと苦しんできたんだね。

ガリレオ・ガリレイ[3]はこのつり合いの問題（斜面の理）を「テコの原理」を使って解いた。ガリレオの考えは次の通りだ。物体 M の斜面 AC に沿っての“ 微小な運動 ”を考えると,（ここがポイントなのだが）斜面に垂直で定点 $O$ のまわりに自由に回転し得る棒の先端に物体 M が付いていると見ても同じだと考えるわけだね。う〜ん，と呻りたくなるような着想だなと思う。

[2]Leonardo da Vinci，1452 − 1519
[3]Galileo Galilei，1564 − 1642。イタリアの物理学者、天文学者、哲学者。




そうすると，斜面上の物体 M のつり合いの問題は右図に示すように長さ $L$ 棒の「テコのつり合い」に焼き直すことができるけど，コニー, フォローしてみるかい。

- コニー：いきなり振られてびっくりぽんだけど，右の図のつり合い問題を解けばいいのね。M の重量 $P$ による力のモーメントは

$$L \times P\cos\phi = \overline{OQ} \times P$$

一方，張力 $T$ による力のモーメントは

$$L \times T$$

この 2 つが等しいとおいて

$$\overline{OQ} \times P = L \times T, \quad \therefore \frac{P}{T} = \frac{L}{\overline{OQ}}$$

となるわ。棒の長さに関係する項が残って面白くないけど。。。

- K 氏：うん，ここで三角形 ABC と $OMQ$ は相似ということに着目すると

$$\frac{L}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

となって，

$$\frac{T}{P} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\text{斜面の高さ}}{\text{斜面の長さ}} \tag{5.1}$$

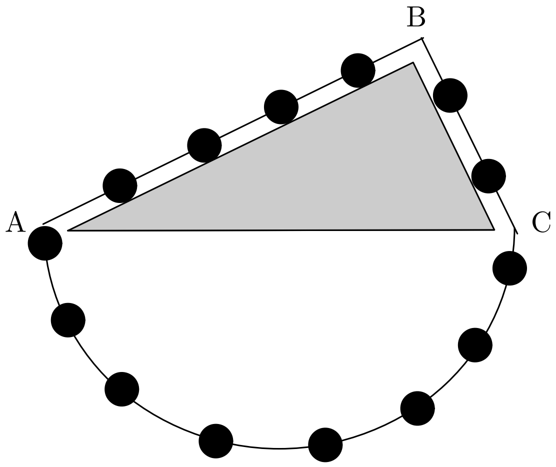
ということになるわけだ。

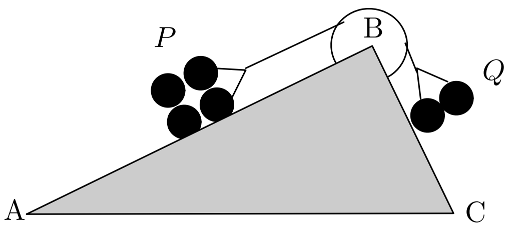
- コニー：なるほど。例えば斜面の長さが高さの 2 倍あるとすれば，物体を斜面に止めて力 $T$ は物体 $M$ の重さ $(P)$ の 1/2 になるわけね。

## ●ステヴィンの思考実験

シモン・ステヴィン[4]はガリレオとほぼ同時代の人だが，彼は数珠を用いた思考実験により永久運動の不可能と斜面の法則について考究し，力の平行四辺形の法則の発見に至っている。ステヴィンの思考実験についのお話をしよう。

- コニー：面白そうね。数珠の実験ってどういうものなの。
- K 氏：うん，彼は長い斜面と短い斜面とでできている三角柱 ABC に数個の重りをつないだ数珠を掛けるとどうなるか考えたんだ。斜面 AB と BC の長さの比は 2：1 とし，左の斜面に 4 個，右の斜面に 2 個重りが載るように数珠をかけた。下に垂れ下がっている部分は左右対称で両方に同じだけ重さがかかるので，つり合いに関しては無いのと同じだね。




さて，パッと見ると左斜面の 4 個の重りが 右斜面の 2 個の重りを引っぱるので，数珠は止まることなく永久に回転し続けると考えられる。つまり永久機関[5]の実現だね。これを利用すれば外から何もエネルギーを加えることなく仕事をし続けるので，無から無尽蔵にエネルギーを取りだすことができる！

- コニー：素晴らしいじゃない！ だけど永久機関は存在しないのよね。
- K 氏：うん，もし存在すればエネルギー保存則が破られ物理学は崩壊してしまう（笑い）。ステヴィンは 1586 年に出版した著書「De Beghinselen des Waterwichts（つり合いの原理）」の中で『ここに不思議がある。だが決して不思議ではない』と書いて，永久機関の実現は不可能なことから，実現される唯一の状態は“ つり合い ”のみであると結論したんだね。

[4]Simon Stevin、1548 年－ 1620 年。ヨーロッパの旧フランドル地方、ブルッヘ（ベルギーのブルージュ）で生まれた数学者、物理学者、会計学者。

[5]「ステヴィンの機械」と 呼ば れる。

- コニー：そうなんだ。「つり合い」だけが実現される唯一のものね。 お話を続けて。

垂れ下がった部分を取り除いてもつり合いは保たれると考えられるので，斜面上の重りを右の図のようにひとまとめにして $P$，$Q$ としても相変わらずつり合っているはずだ。$P$ は $Q$ の 2 倍の重さ，$P$ のいる斜面の長さは $Q$ がいる斜面の長さの 2 倍，ということから，斜面上の重りは，その重さの比が斜面の長さの比に等しいときにつり合うと結論したんだ。

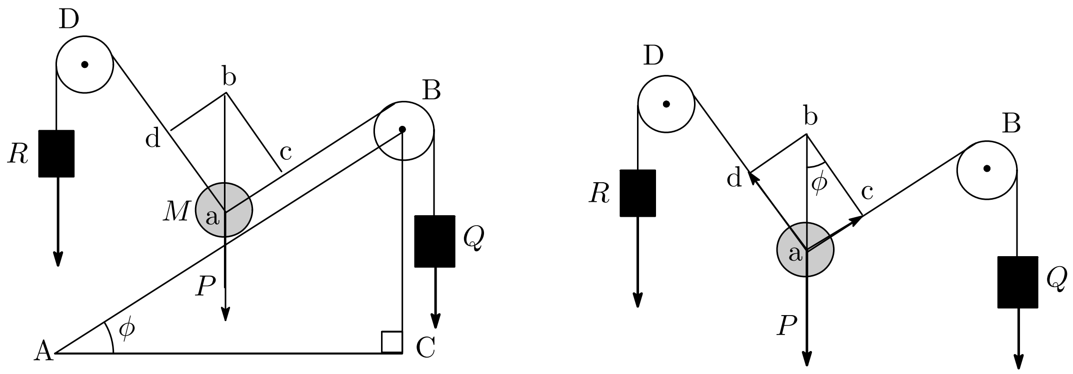
$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \tag{5.2}$$

- コニー：この結論は先ほどガリレオが導いた結論 (5.1) と一致するわね。

- K 氏：そうだね。もっとも歴史的にはステヴィンの方が先に見つけている。

## ●力の平行四辺形則

次頁の左の図のように斜面上の物体 M が重り $Q$ でつながれた糸で引っぱられてつり合っている状況を考えよう。ステヴィンは斜面上の物体の重さを，斜面に平行な方向の重さと斜面に垂直な方向の重さとに“ 分解 ”して考え，それぞれの重さを三角形 ABC の辺の比の割合に分け，それぞれの向きのつり合いを考えた。そのとき，平行四辺形法に気付いたといわれている。




物体 M は斜面上を動くが斜面にめり込んではいかない。ということは，滑車 D を通して斜面に垂直に働く $R$ の力とつり合っていると考えることができる。このように考えると，M は斜面を取り除いても $P, Q, R$ の 3 つの力でつり合いを保つ。$P$ は鉛直下方の力，$Q$ は ac 方向の力，$R$ は ad 方向の力で $Q$ の力と $R$ の力を合わせたものが $P$ の力とつり合っているわけだ。そして $P$ と $Q$ の比は ab と ac の比に等しいと結論した。△abc と △ABC は相似になるので

$$\mathrm{ab} : \mathrm{ac} : \mathrm{ad} = \mathrm{P} : \mathrm{Q} : \mathrm{R} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{AC}}$$

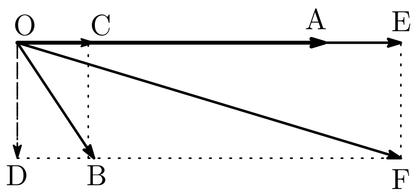
これから $P$ と $Q$ の比は

$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

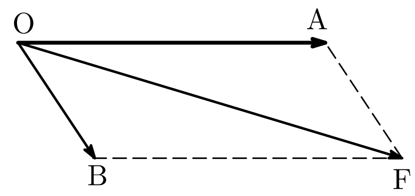
となり，重さと斜面の長さとの間の関係式がでる。

- コニー：力を垂直な 2 つの向きに分解し，それぞれの方向のつり合いを考えるというステヴィンの着想がポイントなのね。今風に考えるとベクトル $\boldsymbol{P}$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{ac}$ と $\overrightarrow{ad}$ の合成ベクトル $\overrightarrow{ab}$ と大きさは等しく向きが反対ということになるわね。

- K 氏：そうだね。“ 力は垂直な二つの方向に分けて考えることができる ”というステヴィンのアイデアを使って力の合成則を考えてみよう。2 つの力 OA と OB があり，この 2 つの合力を求めてみよう。OB を「OA の方向」と「OA に垂直な方向」に分解し，それぞ




力の平行四辺形




れを OC，OD とする。AE を OC と同じ長さにとれば，OA 方向の力の和は OE になるね。これは合力の一つの成分だ。もう一つの成分はこれに垂直な OD なので，合力 OF は OE と OD を成分にもつことになる。結局，OF は OA と OB を 2 辺とする平行四辺形の対角線だね。

- コニー：なるほど，先ほどの斜面の問題では $R$ と $Q$ の力は直交していたけど，力が直交していない場合の合力も平行四辺形の原則から求めることができるわけね。

- K 氏：少しお話が長くなりすぎたので，ここらで終わることにしようか。

- コニー：お疲れ様でした。

第 5 話終わり